数理解析研究所講究録
578巻 1985年 31-87

Twistorとは何か

埼玉大理　高﨑金久　(Kanehisa Takasaki)*

0. 序説

twistor理論の基礎にあるのは通常の時空(その上で様々な場の方程式が定義される)とtwistor空間と呼ばれる複素多様体の間に定義される幾何学的対応(twistor対応)である．対応の概念は写像の概念よりも広いものだが，数学ではごく自然に現れる．最も一般的に言えば，空間Xと空間Yの間の対応とは，第三の空間ZならびにそこからX，Yへの写像π_X，π_Yからなる次の図式のことに他ならない：

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

*) 1985年10月より，京都大学数理解析研究所所属．

π_X が逆写像をもつならば，$\pi_Y \circ \pi_X^{-1}$ は X から Y への写像を定め，逆に X から Y への任意の写像は適当な Z, π_X, π_Y をえらぶことにより $\pi_Y \circ \pi_X^{-1}$ の形に表わせる．この意味で対応の概念は写像の概念を特殊な場合として含む．しかしながら一般には X の各点 x に対して $\pi_Y \circ \pi_X^{-1}(x)$ は Y の一点よりなるとは限らない部分集合である．$\pi_X \circ \pi_Y^{-1}$ についても同様のことが言える．つまり対応 (Z, π_X, π_Y) は X と Y の間に "点 $\longleftrightarrow$ 部分集合" という対応関係を定める．twistor 対応の場合には X が時空，Y が twistor 空間を表わし，X 上の場の方程式（微分方程式）はこの対応を通じて Y 上の幾何学的構造に翻訳される．これが twistor 理論の要点である．

twistor 理論は最初線型微分方程式（Laplace, massless Dirac-Weyl, Maxwell, など）で記述される場を対象として出発し，その後 Yang-Mills 方程式や Einstein 方程式などの非線型方程式に従う場に拡張されて大いに発展した．最近では超対称性（supersymmetry）をもつ場の方程式への応用も議論されている．このように twistor 理論の応用は多岐にわたるので，その詳細については最後に掲げる文献に譲り，このノートではその最も基本的な部分に焦点を絞って，なるべく予備知識を仮定しないで twistor の世界を紹介することをめざす．

ただし，参考文献の選び方もそうだが，本文の内容もかなり筆者の関心に偏りがちのものになることをあらかじめお断りしておく．とりわけ，時空の実構造に関連したtwistor空間上の構造（twistor理論では時空の複素化の方がより自然な対象であり，その中の実切断としての時空を論じるためには余分の構造をtwistor空間に課す必要がある）については一切立ち入らない．以下で時空と言えば，複素化された時空のことを指すものと思われたい．

PART 1. 平坦時空におけるtwistor

ここで平坦な時空と呼ぶのは $\mathbb{C}^4$ のことである．これは4次元Euclid空間，Minkowski空間の共通の複素化を与える．この場合のtwistor対応の一例は前世紀の幾何学で知られていたPlücker-Kleinの対応である．以下このことに関連する事実をできるだけ丁寧に紹介する．

1. Flag多様体とGrassmann多様体

Plücker-Kleinの対応はFlag多様体やGrassmann多様体

を用いて定式化されるので，ここではこれらの概念について簡単にまとめておく．係数体は何でもよいが，我々は以下複素数体上に定義されるもののみ考える．

一般に複素数体上の有限次元線型空間 T（N 次元とする）と自然数列 $0 < n_1 < \cdots < n_k < N$ に対して

$$(1) \qquad L_{n_1} \subset \cdots \subset L_{n_k} \subset T, \quad \dim L_{n_i} = n_i \quad (1 \leq i \leq k)$$

という線型部分空間の組 $(L_{n_1}, \cdots, L_{n_k})$ を T における型 $(n_1, \cdots, n_k)$ の flag と呼び，その全体のなす集合を $F(n_1, \cdots, n_k; T)$ と書いて型 $(n_1, \cdots, n_k)$ の flag 多様体と呼ぶ．これは完備で非特異な代数多様体をなすことが良く知られている．特に $F(n; T)$ $(k=1)$ の場合は Grassmann 多様体と呼ばれ，$G(n; T)$ と書き表わされる．$n = 1$ ならばこれは T の定める射影空間に他ならない：

$$(2) \qquad F(n; T) = G(n; T), \quad G(1; T) = \mathbb{P}(T).$$

型を表示する自然数列 $(n_1, \cdots, n_k)$，$(m_1, \cdots, m_\ell)$ の間に

$$(3) \qquad \{n_1, \cdots, n_k\} \supset \{m_1, \cdots, m_k\}$$

という包含関係があるときには flag 多様体 $F(n_1, \cdots, n_k; T)$ と $F(m_1, \cdots, m_\ell; T)$ との間に次の自然な射影が定義される：

(4) $$\pi^{n_1\cdots n_k}_{m_1\cdots m_\ell} : F(n_1,\cdots,n_k;T) \longrightarrow F(m_1,\cdots,m_\ell;T)$$
$$\pi^{n_1\cdots n_k}_{m_1\cdots m_\ell}((L_{n_1},\cdots,L_{n_k})) = (L_{m_1},\cdots,L_{m_\ell})$$

このような"縦の関係"と並んで，flag多様体の間にはTのdualityに由来する"横の関係"がある．則ち，Tの双対空間$Hom_{\mathbb{C}}(T,\mathbb{C})$を$T^*$で表わすとき，次のような自然な同型写像が定義される；

(5) $$F(n_1,\cdots,n_k;T) \xrightarrow{\sim} F(N-n_k,\cdots,N-n_1;T^*)$$
$$(L_{n_1},\cdots,L_{n_k}) \longrightarrow (L_{n_k}^{\circ},\cdots,L_{n_1}^{\circ})$$

ここで，一般にTの線型部分空間$L\subset T$に対してL°はそのpolar subspaceを表わす：

(6) $$L^\circ = \{\varphi\in T^*;\ \varphi(\xi)=0 \text{ for every } \xi\in L\}.$$

同型(5)から特に：

(7) $$F(N-1;T) = G(N-1;T) \cong \mathbb{P}(T^*).$$

2. Plücker-Kleinの対応，並びに関連する図式

Plücker-Kleinの対応は$T=\mathbb{C}^4$の場合における次の図式で定義される：

$$
(8)\qquad
\begin{tikzcd}
 & F(1,2;T) \arrow[dl, "\pi^{12}_2"'] \arrow[dr, "\pi^{12}_1"] & \\
G(2;T) & & \mathbb{P}(T)
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{P}(T)$を射影的twistor空間と呼ぶ．これに対して$G(2;T)$は平坦時空$\mathbb{C}^4$の完備化とみなされる．この辺の事情についてはあとで座標を使って具体的に説明する．ちなみに，Euclid空間やMinkowski空間を適当に$\mathbb{C}^4$に埋め込んでおいて$G(2;T)$においてcompact化することができるが，Euclid空間からそのようにして得られるcompact化は4次元球面S^4に他ならず，またMinkowski空間のcompact化はMinkowski空間に無限遠での光円錐をはりつけて得られる奇妙な空間であることが知られている．

$T=\mathbb{C}^4$から得られるflag多様体は(8)に示したものに限らない．それらを全部書き下してまとめると次の図式を得る：

$$
(9)\qquad
\begin{tikzcd}
 & F(1,2,3;T) \arrow[dl, "\pi^{123}_{12}"'] \arrow[d, "\pi^{123}_{13}"] \arrow[dr, "\pi^{123}_{23}"] & \\
F(1,2;T) \arrow[d, "\pi^{12}_1"'] \arrow[dr, "\pi^{12}_2"'] & F(1,3;T) \arrow[dl, "\pi^{13}_1"'] \arrow[dr, "\pi^{13}_3"] & F(2,3;T) \arrow[dl, "\pi^{23}_2"] \arrow[d, "\pi^{23}_3"] \\
\mathbb{P}(T) & G(2;T) & G(3;T)
\end{tikzcd}
$$

この図式の左右対称性は同型(5)の存在を反映している．より詳しく言えば，同型(5)によって互いにうつりあう次の図式が(9)の dual として存在しているのである：

$$
(10) \quad
\begin{tikzcd}
 & & F(1,2,3;T^*) \arrow[dll, "\pi^{*123}_{23}"'] \arrow[d, "\pi^{*123}_{13}"] \arrow[drr, "\pi^{*123}_{12}"] & & \\
F(2,3;T^*) \arrow[d, "\pi^{*23}_{3}"'] \arrow[drr, "\pi^{*23}_{2}"] & & F(1,3;T^*) \arrow[dll, "\pi^{*13}_{3}"'] \arrow[drr, "\pi^{*13}_{1}"] & & F(1,2;T^*) \arrow[dll, "\pi^{*12}_{2}"'] \arrow[d, "\pi^{*12}_{1}"] \\
G(3;T^*) & & G(2;T^*) & & \mathbb{P}(T^*)
\end{tikzcd}
$$

ここで T^* の flag 多様体における射影(4)を区別のため $\pi^{*\cdots}_{\cdots}$ と書いた．(9)と(10)は実質的に同じであるから，図式の各頂点にある flag 多様体を考えるときには都合に応じて T, T^* のうち便利な方による表示を使ってよい．実は(8)だけではなく図式(9)，(10)全体が時空の幾何学に関して重要な意味をもっている．このこともあとで具体的に座標を導入して考えてみる．

3. $G(2;T)$ 上の座標

まず $G(2;T)$ の Plücker 座標について説明する．$T=\mathbb{C}^4$ の各元 ξ を4成分のタテベクトルとみて $\xi=(\xi_i)$ $(i=0,\cdots,3)$ と表わすことにして，$G(2;T)$ を具体的に表示することを考え

る．$G(2;T)$ の各元 L は T の２次元線型部分空間であるから，その基底 $\xi^{(0)}=(\xi_{i0})$，$\xi^{(1)}=(\xi_{i1})$ あるいはそれを並べてできる 4×2 行列 (ξ_{ij}) $(i=0,\cdots,3,\ j=0,1)$ を与えれば定まる．ただし L に対して基底の選び方は一意的ではない．その任意性は (ξ_{ij}) に対して右から $GL(2)$ を掛ける分だけある．以上のことをまとめると，次のような同一視ができる：

$$(11)\qquad G(2;T)\cong\{4\times 2\text{行列}\ \xi=(\xi_{ij})\,;\ \mathrm{rank}\,\xi=2\}/\sim,$$
$$\text{ここで}\ \xi'\sim\xi \iff \exists h\in GL(2),\ \xi'=\xi h.$$

上の同一視において $G(2;T)$ のひとつの元を代表する 4×2 行列 $\xi=(\xi_{ij})$ から次の６個の行列式をつくることができる：

$$(12)\qquad \xi_{kl}=\det\begin{bmatrix}\xi_{k0} & \xi_{k1}\\ \xi_{l0} & \xi_{l1}\end{bmatrix}\quad(0\le k<l\le 3).$$

（行列成分 ξ_{ij} と混同しないように注意）．これが Plücker 座標である．$\xi\sim\xi'$ のときには Plücker 座標が定数倍を除いて一致する（つまりある定数 $c\neq 0$ に対して $\xi'_{kl}=c\,\xi_{kl}$）ことに注意すると，Plücker 座標により $G(2;T)$ から $\mathbb{P}^5$ への写像

$$(13)\qquad \begin{array}{ccc} G(2;T) & \longrightarrow & \mathbb{P}^5\\ \xi & \longrightarrow & (\xi_{kl})\quad(0\le k<l\le 3)\end{array}$$

が得られる．実はこれは埋め込みであり（従って $G(2;T)$ の射影的埋め込みを与える），しかもその像は Plücker 関係式

(14) $$\xi_{01}\xi_{23}-\xi_{02}\xi_{13}+\xi_{03}\xi_{12}=0$$

で定義される2次超曲面に他ならない.

Plücker座標を用いると $G(2;T)$ 上のaffine座標系を構成することもできる. 実際, $G(2;T)$ を

(15) $$G(2;T)=\bigcup_{k<l} G^{kl},\quad G^{kl}=\{\xi_{kl}\neq 0\}$$

という6個の開集合でおおい, 各 G^{kl} から $\mathbb{C}^4$ への写像

(16) $$\begin{aligned} G^{kl} &\longrightarrow \mathbb{C}^4 \\ \xi &\longrightarrow \left(\frac{\xi_{ij}}{\xi_{kl}}\right) \quad (i<j,\ (ij)\neq(kl),\ \{ijkl\}\neq\{0123\}) \end{aligned}$$

を導入すると, (16) はいずれも同型写像であり, $G(2;T)$ 上にひとつのaffine座標系を与える.

我々が平坦時空の実現とみなすのは上で導入した開集合のうちのひとつ, G^{01} である. そのように考えるのは平坦時空の幾何的構造が図式(8)−(10)から再現されるからだが, このことを見るために, G^{01} のより具体的な表現を用意しておこう. (11) のように $G(2;T)$ を行列 ξ の同値類の集合とみなすとき, G^{01} 上では $\xi_{01}\neq 0$ であるから ξ の上半分は可逆行列である. このとき $\xi\sim\xi\cdot(\xi\text{の上半分})^{-1}$ であるから G^{01} の元をあらわす行列 ξ の同値類の代表として $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\ *&*\\ *&*\end{pmatrix}$ とい

う形のものがえらべることがわかる．しかもこのように上半分が単位行列にそろえられたξは下半分が異なる限り互いに非同値である．こうして次の同型対応が得られる：

(17) $$G^{01} \cong \{ \xi = (\xi_{ij}) ; \quad \xi_{ij} = \delta_{ij} \ (i,j=0,1) \}.$$

ちなみに右辺のξのPlücker座標を計算しておくと：

(18) $$\xi_{01} = 1, \quad \xi_{02} = \xi_{21}, \quad \xi_{03} = \xi_{31}, \quad \xi_{12} = -\xi_{20}, \quad \xi_{13} = -\xi_{30}, \quad \xi_{23} = \det(\xi_{i+2,j}).$$

従って(16)に示された座標は本質的には$\xi_{i+2,j}$ $(i,j=1,2)$と一致する．このように，G^{01}は2×2行列（ξの下半分）の集合と同一視できる．ξ_{23}は時空の計量と関係がある（後述）．

4. Spinor記法

twistor理論ではspinor記法が慣用になっている．これは慣れれば便利な記法なので以後の議論でも積極的に用いる．

spinor添字．　$\alpha, \beta, \cdots$ および $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \cdots$ という二種類の添字集合を用意し，前者は$0, 1$，後者は$\dot{0}, \dot{1}$という値をとるものとする．これらはそれぞれ異なる変換性を象徴するものと了解されたい．（なお，Twistor理論ではむしろ大文字$A, B, \cdots, \dot{A}, \dot{B}, \cdots$をよく使う．）

Tの元の表示．　Tの元は$\xi = \begin{pmatrix} \lambda_{\dot{\alpha}} \\ u^{\alpha} \end{pmatrix}$というように下半分が上ツキ

点無しの spinor 添字をもつ2成分量，上半分が下ツキ点有りの2成分量，という形で表示される．

<u>T^* の元の表示</u>．T^* の元を $\varphi=(v^{\dot\beta},\mu_\beta)$ というようにヨコベクトルの形に表わし（α の代わりに β を使ったのは，α はタテの，β はヨコの添字に使いたいという気持ちがあるからだが），T の元 ξ との pairing を次のように定める：

(19) $$\langle\varphi,\xi\rangle=\varphi(\xi)=v^{\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha}+\mu_\alpha u^\alpha,$$

$$v^{\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha}=v^{\dot 0}\lambda_{\dot 0}+v^{\dot 1}\lambda_{\dot 1}\ ,\ \mu_\alpha u^\alpha=\mu_0u^0+\mu_1u^1.$$

（注意：Einstein の規約に従っている）

<u>平坦時空 $\mathbb{C}^4$ の座標</u>．これは $x^{\alpha\dot\alpha}$ （$\alpha=0,1,\ \dot\alpha=\dot 0,\dot 1$）と表示され，次に述べるように G^{01} の座標表示と対応している．

<u>$G(2;T)$ および G^{01}</u>．$G(2;T)$ を (11) のように表現するとき 4×2 行列 ξ の成分は $\xi=\begin{pmatrix}\lambda_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\\ u^{\alpha\dot\beta}\end{pmatrix}$ （$\alpha,\dot\alpha$ はタテの，$\dot\beta$ はヨコの添字）と表わされる．特に (17) に示されたような G^{01} の表示では ξ は

(20) $$\xi=\begin{pmatrix}\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\\ x^{\alpha\dot\beta}\end{pmatrix}$$ （$\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}$ は Kronecker delta を表わす）

という形をとる．

上のように平坦時空の座標を表示することの意義につい

てここで少し触れておく．まずこのような表示の下では時空の計量（正確にはその複素2次形式への拡張）が $\det(x^{\alpha\dot\beta}) = x^{0\dot0}x^{1\dot1} - x^{0\dot1}x^{1\dot0}$ の形に書ける．実際4次元Euclid空間の直交座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) に対して $x^{\alpha\dot\alpha}$ を

$$(21) \qquad (x^{\alpha\dot\beta}) = \begin{pmatrix} x^0 + ix^1 & x^2 + ix^3 \\ -x^2 + ix^3 & x^0 - ix^1 \end{pmatrix} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

と定めれば確かに $\det(x^{\alpha\dot\beta})$ はEuclid計量を与える．座標軸のいくつかを虚軸へ回せばMinkowski計量を得る．違って来るのは $x^{\alpha\dot\alpha}$ の表示だけであり，計量が $\det(x^{\alpha\dot\beta})$ の形に書けることは同様である．特に $x^{\alpha\dot\alpha}$ が null direction（つまり計量が消える方向）となるのは $\mathrm{rank}(x^{\alpha\dot\beta}) \leq 1$ の場合に他ならない．このことはtwistorと密接な関係がある（後述）．さらに時空の点を(20)のように考えることにより，時空上の反転も含めた変換が $G(2;T)$ への $GL(4)$ の自然な作用の帰結として導かれる．これを見るために 2×2 行列 $(x^{\alpha\dot\beta})$ を X，単位行列を $\mathbb{1}$ と略記して行列 $\xi = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ X \end{pmatrix}$ への $GL(4)$ の作用を書き下そう．$GL(4)$ の元 g を $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_4 \\ g_2 & g_3 \end{pmatrix}$，$g_1, \cdots, g_4$ は 2×2，とblockに分けると

$$(22) \qquad g\xi = \begin{pmatrix} g_1 + g_4 X \\ g_2 + g_3 X \end{pmatrix}$$

であり，これが再び G^{01} に属する（$\Longleftrightarrow$ $g_1 + g_4 X$ が可逆）なら

ば対応する時空の座標は $(g_2+g_3X)(g_1+g_4X)^{-1}$ である．つまり X に関して $g\in GL(4)$ の作用を表示すると

$$(23)\qquad X \longrightarrow (g_2+g_3X)(g_1+g_4X)^{-1}$$

となる． $g_2=g_4=0$ のときには変換 (23) は $X\longrightarrow g_3Xg_1^{-1}$ となり，$GL(2)\times GL(2)$ の作用とみなせる．二種類のspinor添字はこの二つの $GL(2)$ のそれぞれに関する変換性を担っている．g_1, g_3 を適当に制限すればここから直交変換やLorentz変換が得られる．また，$g_1=g_3=0$，$g_2=g_4=\mathbb{1}$ とすると (20) は $X\to X^{-1}$ となるが，これは原点を無限遠にうつす反転に他ならない．

5. Plücker-Kleinの対応等の座標表示

Plücker-Klein の対応 (8) を以上に見てきたような座標を使って具体的に記述してみよう．そのために議論を $G(2;T)$ の部分集合 G^{01} に限定する．このことは (8) の代わりに

$$(24)\qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & (\pi_2^{12})^{-1}(G^{01}) \arrow[dl, "\pi_2^{12}"'] \arrow[dr, "\pi_2^{12}"] & \\ G^{01} & & \pi_1^{12}\circ(\pi_2^{12})^{-1}(G^{01}) \end{tikzcd}$$

を考えることを意味する．$(\pi_2^{12})^{-1}(G^{01})$ に属するflagは $L_1\subset L_2$，$L_2\in G^{01}$ という線型部分空間の組 (L_1, L_2) であるが，L_2 に

はすでに見たように(20)の形の行列を対応させることができる．またL_1はそれに属する0でない元を指定すれば定まる．そのような元を$\begin{pmatrix}\lambda_{\dot\alpha}\\ u^{\alpha}\end{pmatrix}$と表わすことにしよう．このとき$L_1 \subset L_2$という関係はこのタテベクトルが$L_2$を表わす行列$\begin{pmatrix}\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\\ x^{\alpha\dot\beta}\end{pmatrix}$の2個の列の適当な1次結合で書けることを意味する．容易に判るように：

(25) $$L_1 \subset L_2 \iff u^{\alpha} = x^{\alpha\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha}.$$

またここで現れる$\begin{pmatrix}\lambda_{\dot\alpha}\\ u^{\alpha}\end{pmatrix}$は$\lambda_{\dot\alpha} = 0$ $(\dot\alpha = \dot 0, \dot 1)$とならないものに限ることも判る．以上まとめると，図式(24)は$\lambda_{\dot\alpha}, u^{\alpha}, x^{\alpha\dot\alpha}$を用いて次のように具体的に表示される：

(26)
$$\begin{array}{ccc} & \{(x^{\alpha\dot\alpha}, \lambda_{\dot\alpha}, u^{\alpha}) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{P}^3 ;\ (\lambda_{\dot\alpha}) \neq (00),\ u^{\alpha} = x^{\alpha\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha}\} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathbb{C}^4 = \{(x^{\alpha\dot\alpha}) ;\ x^{\alpha\dot\alpha} \in \mathbb{C}\} & & \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^1 = \{(\lambda_{\dot\alpha}, u^{\alpha}) \in \mathbb{P}^3 ; (\lambda_{\dot\alpha}) \neq (00)\} \end{array}$$

同様にして図式(9)，(10)（(5)によって実は互に同等）全体に対しても座標による表示を与えることができる．(ただしここでも(24)と同様$G^{01} \subset G(2;T)$に対応する部分集合に議論を限定することが必要．)ここで新たに現れるのは$L_1 \subset L_2 \subset L_3$というflagの$L_3$に関係した座標であるが，第1節で注意したように3次元の線型部分空間$L_3 \subset T$は1次元の線型部分

空間$L_3^\circ \subset T^*$と1対1に対応するから，L_3を指定するにはL_3°に属する0でない元を与えればよい．そのような元を一般に$(-v^{\dot\beta}, \mu_\beta)$と表わす．負符号を付けたのはtwistor理論の習慣にならったまでであり本質的ではない．ともかくこの量を用いると，TとT^*のpairingの入れ方(19)から次のことが従う：

(27) $L_2 \subset L_3 \iff v^{\dot\alpha} = \mu_\alpha x^{\alpha\dot\alpha}$.

(28) $L_1 \subset L_3 \iff v^{\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha} - \mu_\alpha u^\alpha = 0$.

またL_2がG^{01}に属するときには対応する$(-v^{\dot\beta}, \mu_\beta)$は$\mu_\beta = 0$ $(\beta = 0, 1)$とならないものに限ることもわかる．このような議論から，結論として図式(9), (10)に現われる各flag多様体(のG^{01}に対応する部分集合)に対して次のような座標表示が得られる：

図式(9), (10)の座標表示.

座標： $\lambda_{\dot\alpha}$, u^α, $x^{\alpha\dot\alpha}$, μ_α, $v^{\dot\alpha}$ $(\alpha = 0, 1,\ \beta = \dot 0, \dot 1)$

線型部分空間：$L_1 \longleftrightarrow (\lambda_{\dot\alpha}, u^\alpha)$, $L_2 \longleftrightarrow (x^{\alpha\dot\alpha})$, $L_3 \longleftrightarrow (\mu_\alpha, v^{\dot\alpha})$

各flag多様体のG^{01}に対応する部分集合の座標表示：

(29) $(\pi_2^{123})^{-1}(G^{01})\ (\subset F(1,2,3;T))$

$$\cong \{(\lambda_{\dot\alpha}, u^\alpha, x^{\alpha\dot\alpha}, \mu_\alpha, v^{\dot\alpha}) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{P}^3;\ (\lambda_{\dot\alpha}) \neq (00),\ (\mu_\alpha) \neq (00),\ u^\alpha = x^{\alpha\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha},\ v^{\dot\alpha} = \mu_\alpha x^{\alpha\dot\alpha}\},$$

(30) $(\pi_2^{12})^{-1}(G^{01})\quad(\subset F(1,2;T))$

$$\cong\{(\lambda_{\dot\alpha},u^{\alpha},x^{\alpha\dot\alpha})\in\mathbb{P}^3\times\mathbb{C}^4;\ (\lambda_{\dot\alpha})\neq(00),\quad u^{\alpha}=x^{\alpha\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha}\},$$

(31) $\pi_{13}^{123}\circ(\pi_2^{123})^{-1}(G^{01})\quad(\subset F(1,3;T))$

$$\cong\{(\lambda_{\dot\alpha},u^{\alpha},\mu_{\alpha},v^{\dot\alpha})\in\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3;\ (\lambda_{\dot\alpha})\neq(00),\ (\mu_{\alpha})\neq(00),\ v^{\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha}-\mu_{\alpha}u^{\alpha}=0\},$$

(32) $(\pi_2^{23})^{-1}(G^{01})\quad(\subset F(2,3;T))$

$$\cong\{(x^{\alpha\dot\alpha},\mu_{\alpha},v^{\dot\alpha})\in\mathbb{C}^4\times\mathbb{P}^3;\ (\mu_{\alpha})\neq(00),\quad v^{\dot\alpha}=\mu_{\alpha}x^{\alpha\dot\alpha}\},$$

(33) $\pi_1^{12}\circ(\pi_2^{12})^{-1}(G^{01})\quad(\subset\mathbb{P}(T))$

$$\cong\{(\lambda_{\dot\alpha},\omega^{\alpha})\in\mathbb{P}^3;\ (\lambda_{\dot\alpha})\neq(00)\}\cong\mathbb{P}^3\setminus\mathbb{P}^1,$$

(34) $\pi_3^{23}\circ(\pi_2^{23})^{-1}(G^{01})\quad(\subset G(3;T)\cong\mathbb{P}(T^*))$

$$\cong\{(\mu_{\alpha},\psi^{\dot\alpha})\in\mathbb{P}^3;\ (\mu_{\alpha})\neq(00)\}\cong\mathbb{P}^3\setminus\mathbb{P}^1.$$

射影：座標に関する自然な射影．例えば，

$$\pi_{13}^{123}:(\lambda_{\dot\alpha},u^{\alpha},x^{\alpha\dot\alpha},\mu_{\alpha},v^{\dot\alpha})\to(\lambda_{\dot\alpha},u^{\alpha},\mu_{\alpha},v^{\dot\alpha}).$$

なお $(\lambda_{\dot\alpha},u^{\alpha})$，$(\mu_{\alpha},v^{\dot\alpha})$ はそれぞれ $\mathbb{P}(T)$，$\mathbb{P}(T^*)$ $(\cong\mathbb{P}^3)$ の斉次座標として用いられている．

6. Plücker-Klein の対応等の幾何学的意味

最初に注意したように，一般に二つの空間の間の対応は"点 ⟷ 部分集合"という形の対応関係を定めている．Plücker-Kleinの対応の場合には時空の完備化である $G(2;T)$ と射影的twistor空間 $\mathbb{P}(T)$（或は単にtwistor空間と呼んでもよいかも知れない）の間で"点 ⟷ 部分集合"の対応関係が定められているわけであり，これがどのような幾何学的構造を記述しているかが次の問題である．同様のことは図式(9), (10)についてもいえる．以下ではこの問題について考える．

まずPlücker-Kleinの対応について考えよう．そのために議論を再び G^{01} に対応する部分集合に限定する．つまり図式(24)或はその座標表示(26)を考える．$\pi_1^{12}\circ(\pi_2^{12})^{-1}(G^{01}) \cong \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^1$ の点 $(\lambda_{\dot\alpha}, u^\alpha)$ および $G^{01} \cong \mathbb{C}^4$ の点 $(x^{\alpha\dot\alpha})$ のそれぞれに対応する部分集合は次のようになる：

(35) $\quad \pi_2^{12}\circ(\pi_1^{12})^{-1}(\lambda_{\dot\alpha}, u^\alpha) = \{(x^{\alpha\dot\alpha}) \in \mathbb{C}^4;\ \ u^\alpha = x^{\alpha\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha}\}$,

(36) $\quad \pi_1^{12}\circ(\pi_2^{12})^{-1}(x^{\alpha\dot\alpha}) = \{(\lambda_{\dot\alpha}, u^\alpha) \in \mathbb{P}^3\setminus\mathbb{P}^1;\ \ u^\alpha = x^{\alpha\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha}\}$.

<u>(36)の意味</u>．　$\mathbb{P}^3\setminus\mathbb{P}^1$ が $\{(\lambda_{\dot\alpha}, u^\alpha) \in \mathbb{P}^3;\ (\lambda_{\dot\alpha}) \neq (0\,0)\}$ の意味であったことに注意すると，次の同型写像を得る：

(37)
$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{12}\circ(\pi_2^{12})^{-1}(x^{\alpha\dot\alpha}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1 \\ (\lambda_{\dot\alpha}, u^\alpha) & \longrightarrow & (\lambda_{\dot\alpha}) \end{array}$$

このようにG^{01}の各点はPlücker-Kleinの対応によって$\mathbb{P}(T)$内のline，すなわち2個の独立な斉次1次式の共通零点として得られる部分多様体（$\cong\mathbb{P}^1$）と1対1対応することがわかる．全く同じことは$G(2;T)$の一般の点についても言える；つまり$G(2;T)$の各点xに対して$\pi_1^{12}\circ(\pi_2^{12})^{-1}(x)$は$\mathbb{P}(T)$内のlineである．ただし$G^{01}$以外の点に対応するlineは$\{(\lambda_{\dot\alpha})=(00)\}$（$\cong\mathbb{P}^1$）と交叉する．正確にいえば次のようになる：

$$(38)\qquad x\in G^{01} \Longleftrightarrow \pi_1^{12}\circ(\pi_2^{12})^{-1}(x)\cap\{(\lambda_{\dot\alpha})=(00)\}=\phi.$$

こうして図式(26)で$\mathbb{P}^3\setminus\mathbb{P}^1$（$\mathbb{P}^1=\{(\lambda_{\dot\alpha})=(00)\}$）が現れる理由がより明確になった．ともかく，Plücker-Kleinの対応は"時空点$\longleftrightarrow\mathbb{P}(T)$内のline"という対応関係を明らかにする．このことから，twistor空間こそ根源的な存在であり，時空はそこから（lineの集合として）つくり出される二次的な存在に過ぎない，という考え方が生まれる．これはtwistor理論の基礎をなす考え方である．

(35)の意味．　(35)の右辺が表わすのは$\mathbb{C}^4$内のある2次元平面である．u^{α}を変えることによりその平面からなるひとつの複素解析的葉層構造が定まる．これはPfaff方程式系

$$(39)\qquad dx^{\alpha\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha}=0$$

によっても特徴づけられる。(35)のような平面をtwistor理論ではα-planeと呼ぶことがある．今は議論を$G^{01} \cong \mathbb{C}^4$に限定しているためα-planeは$\mathbb{C}^4$内の2次元平面をなすが，もとのPlücker-Kleinの図式に戻って$\pi_2^{12} \circ (\pi_1^{12})^{-1}(\xi)$ ($\xi \in \mathbb{P}(T)$)を考えればこれは$\mathbb{P}^2$に同型であることが容易にわかる．いずれにせよ，$\mathbb{P}(T)$の点をtwistorと呼ぶことにすれば，以上のことにより"α-plane ⟷ twistor"という対応関係が定まることになる．これがPlücker-Kleinの対応のもうひとつの側面である．このことはまた，より一般の時空に対してtwistor空間をどのように構成すればよいか，という問題に対するひとつの考え方を示唆している．

α-planeの性質について触れておく．この平面上の任意の変位（接 vector）$\Delta x^{\alpha\dot{\alpha}}$は方程式

(40) $$\Delta x^{\alpha\dot{\alpha}} \lambda_{\dot{\alpha}} = 0$$

に従う．これは特に$\Delta x^{\alpha\dot{\alpha}}$がnull，すなわち

(41) $$\det(\Delta x^{\alpha\dot{\alpha}}) = 0$$

であることを意味する（第4節参照）．それだけではなく，(40)から（2×2行列の特殊事情により）ただちに$\Delta x^{\alpha\dot{\alpha}}$が

次の形に書けることがわかる：

(42) $$\Delta x^{\alpha\dot{\alpha}} = \mu^{\alpha}\lambda^{\dot{\alpha}}.$$

ここで μ^{α} は適当な2成分量であり，また $\lambda^{\dot{\alpha}}$ は

(43) $$\lambda^{\dot{\alpha}} = \lambda_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \text{ は Levi-Civita symbol}$$
$$(\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = 0, \quad \epsilon^{\dot{0}\dot{1}} = 1)$$

と定義される量である．ちなみに，任意の null vector は適当な $\mu^{\alpha}, \lambda^{\dot{\alpha}}$ により (42) の形に書けることに注意されたい（これは線型代数の簡単な演習問題である）．このうち一方の因子 $\lambda^{\dot{\alpha}}$ を一定にしたものが α-plane の接方向を張っているのである．

以上，Plücker-Klein の対応が時空の幾何学において有する意味について見てきた．ところで図式 (9), (10) には Plücker-Klein の対応以外にも時空 $G(2;T)$ に関連する対応図式が含まれている．それらもまた様々な意味をもっているのだが，特に次の二つの対応図式が重要である．

(44)
$$\begin{tikzcd} & F(2,3;T) \arrow[dl, "\pi_2^{23}"'] \arrow[dr, "\pi_3^{23}"] & \\ G(2;T) & & G(3;T) \cong \mathbb{P}(T^*) \end{tikzcd}$$

$$(45) \qquad \begin{array}{ccc} & F(1,2,3;T) & \\ \pi^{123}_{2} \swarrow & & \searrow \pi^{123}_{13} \\ G(2;T) & & F(1,3;T) \end{array}$$

以下これらについても基本的性質をまとめておく.

まず図式(44)であるが, これは第2節で述べた意味においてPlücker-Kleinの図式とdualの関係にあり, 似た構造をもつ. 第一に, "時空点 $\longleftrightarrow$ $\mathbb{P}(T^*)$内のline ($\cong \mathbb{P}^1$)" という対応関係が定まり, これによって時空は$\mathbb{P}(T^*)$内のlineの集合と同一視される. 第二に, $\mathbb{P}(T^*)$の点(twistor)に対応するのはやはり$G(2;T)$内の$\mathbb{P}^2$に同型な集合であり, $G^{01} \cong \mathbb{C}^4$に制限して座標$x^{\alpha\dot\alpha}$で表示すれば$\mathbb{C}^4$内の

$$(46) \qquad v^{\dot\alpha} = \mu_\alpha x^{\alpha\dot\alpha}$$

で定義される2次元平面であることがわかる. ここで$(\mu_\alpha, v^{\dot\alpha})$は与えられた$\mathbb{P}(T^*)$の点の座標を表わす. この平面は$\alpha$-planeに対して, β-planeと呼ばれる. β-plane上の任意の変位はやはり(42)の形に書ける. ただしμ^αは

$$(47) \qquad \mu^\alpha = \mu_\beta \epsilon^{\beta\alpha}, \quad \epsilon^{\alpha\beta} \text{は Levi-Civita symbol}$$
$$(\epsilon^{\alpha\beta} + \epsilon^{\beta\alpha} = 0, \quad \epsilon^{01} = 1).$$

このように、β-plane もまたある種の null vector で張られていることがわかる。

次に図式(45)について考える。まず、時空点に対応する $F(1,3;T)$ の部分集合は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ に同型であることが容易に判る。特に時空点として G^{01} に属するものに対しては、(29)の座標表示を用いれば $\{(\lambda_{\dot\alpha}, u^{\alpha}, \mu_{\alpha}, v^{\dot\alpha});\ u^{\alpha} = x^{\alpha\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha},\ v^{\dot\alpha} = \mu_{\alpha}x^{\alpha\dot\alpha}\}$ が対応する $F(1,3;T)$ の部分集合であり、これは $(\lambda_{\dot\alpha}, \mu_{\alpha})$ を斉次座標として $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ に同型である。ちなみに $F(1,3;T)$ 自体は次のように $\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3$ へ埋め込むことができる：

(48)
$$\begin{aligned} F(1,3;T) &\longrightarrow \mathbb{P}(T)\times\mathbb{P}(T^*) \cong \mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3 \\ (L_1, L_3) &\longrightarrow (L_1, L_3^{\circ}) \end{aligned}$$

また $\mathbb{P}(T)$, $\mathbb{P}(T^*)$ の斉次座標 $(\lambda_{\dot\alpha}, u^{\alpha})$, $(\mu_{\alpha}, v^{\dot\alpha})$ を用いると(48)の像は次の2次超曲面で与えられる：

(49)
$$v^{\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha} - \mu_{\alpha}u^{\alpha} = 0.$$

(31)の座標表示は本質的にはこれらの事実に拠っている。こうして図式(45)は"時空点 $\longleftrightarrow$ 2次超曲面(49)内の line × line" という対応関係を定める。さて、今度は逆に $F(1,3;T)$ あるいは2次超曲面(49)上の点を与えて、対応する時空内の部分

集合の形状を考えてみる．これも容易に判ることだが，この部分集合は α-plane と β-plane の交叉として表され，$\mathbb{P}^1$ に同型である．また G^{01} との共通部分では座標 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ により

$$(50) \qquad u^{\alpha} = x^{\alpha\dot{\alpha}}\lambda_{\dot{\alpha}}, \quad v^{\dot{\alpha}} = \mu_{\alpha}x^{\alpha\dot{\alpha}}$$

という方程式で与えられる直線（(49)により確かに $\mathbb{C}^4$ 内の直線が定まることが判る）になる．この直線上の任意の変位 $\Delta x^{\alpha\dot{\alpha}}$ は

$$(51) \qquad \Delta x^{\alpha\dot{\alpha}} = c\mu^{\alpha}\lambda^{\dot{\alpha}} \quad (c\text{ は任意定数})$$

という形をもち，特に null である．逆に任意の null vector が適当な $\mu^{\alpha}, \lambda^{\dot{\alpha}}$，$c$ によって上の形に表されることはすでに注意した通りであるから，結局 $F(1,3;T)$ あるいは2次超曲面(49)上の点は時空内の null line（光線の軌跡）に1対1に対応する．こうして，図式(45)は" null line $\longleftrightarrow$ $F(1,3;T)$ あるいは2次超曲面(49)の点" という対応関係も定める．

以上のように，図式(44)，(45)もまた Plücker-Klein の対応と同じように時空の幾何学，とりわけ null vector の構造と密接な関係にある．これら三つの対応はどれも twistor 対応と呼ぶべきものであるが，時空上の場の方程式の記述においては

それぞれが少しずつ異なった役割をはたす。その詳細については後に掲げる文献を参照されたい。最後に，三つの twistor 対応について基本的な事実を表にまとめておく。

	Plücker-Klein 対応	対応 (44)	対応 (45)
時空	$G(2;T)$	$G(2;T)$	$G(2;T)$
twistor 空間	$\mathbb{P}(T)\cong\mathbb{P}^3$	$G(3;T)\cong\mathbb{P}(T^*)\cong\mathbb{P}^3$	$F(1,3;T)\cong$ $\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3$ 内の2次超曲面
時空点に対応する twistor 空間の部分集合	line $\cong\mathbb{P}^1$	line $\cong\mathbb{P}^1$	line × line $\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$
twistor 空間の点に対応する時空の部分集合	α-plane $\cong\mathbb{P}^2$	β-plane $\cong\mathbb{P}^2$	null line $=\alpha$-plane $\cap$ β-plane $\cong\mathbb{P}^1$
その上の変位 $\Delta x^{\alpha\dot\alpha}$	$\mu^\alpha\lambda^{\dot\alpha}$ (μ^α 任意)	$\mu^\alpha\lambda^{\dot\alpha}$ ($\lambda^{\dot\alpha}$ 任意)	$c\mu^\alpha\lambda^{\dot\alpha}$ (c 任意)

7. 場の方程式への応用

これまでの議論を通じて twistor 対応が時空の null vector の構造（いいかえれば光円錐の構造）と密接に関連している

ことは十分に納得していただけたと思う．twistor理論が応用されるのは専ら固有質量零（massless）の粒子に対応する場であり，相対論によればmassless粒子は光速で運動するのであるから，そのような場の記述に光円錐が関与するのは当然のことと言ってよい．しかしながら，これまでの議論とmassless粒子の場の方程式がどのように結びつくのかについては，なお相当の説明を要する．それゆえその詳細は文献に譲りたいが，ここで全く触れないのでは片手落ちの感じを免れないので，ほんのサワリの部分を以下に紹介する．

twistor理論の応用としてよく例に掲げられるのは次のようなmassless spinor場の方程式であろう：

(52) $\partial^{\alpha\dot{\alpha}}\varphi_{\alpha\beta\cdots\gamma}=0$，$\varphi_{\alpha\beta\cdots\gamma}$ は $2s$ ($s=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots$) 個の無点spinor添字 $\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ に関して対称な場．

(53) $\partial^{\alpha\dot{\alpha}}\psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\cdots\dot{\gamma}}=0$，$\psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\cdots\dot{\gamma}}$ は $2s$ ($s=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots$) 個の有点spinor添字 $\dot{\alpha},\dot{\beta},\cdots,\dot{\gamma}$ に関して対称な場．

ただしここで $\partial^{\alpha\dot{\alpha}}$ は $\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\equiv\partial/\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}$ から次のように定義される微分作用素である（(43)，(47) 式参照）：

(54) $$\partial^{\alpha\dot{\alpha}}=\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial_{\beta\dot{\beta}}$$

具体的には

$$\partial^{0\dot{0}} = \partial_{1\dot{1}}, \quad \partial^{0\dot{1}} = -\partial_{1\dot{0}},$$
$$\partial^{1\dot{0}} = -\partial_{0\dot{1}}, \quad \partial^{1\dot{1}} = -\partial_{0\dot{0}},$$

であり，従って (52), (53) はそれぞれ次のように書ける：

(55)
$$\partial_{1\dot{\alpha}}\varphi_{0\beta\cdots\gamma} = \partial_{0\dot{\alpha}}\varphi_{1\beta\cdots\gamma},$$
$$\partial_{\alpha\dot{1}}\psi_{\dot{0}\dot{\beta}\cdots\dot{\gamma}} = \partial_{\alpha\dot{0}}\psi_{\dot{1}\dot{\beta}\cdots\dot{\gamma}}.$$

s は対応する粒子の spin を表わす．$s=\frac{1}{2}$ のとき Dirac-Weyl 粒子（例えば質量が無いと考えるときの自由なニュートリノ）がこの方程式に従う．$s=1$ のときには光子の場（つまり電磁場）がこの方程式で記述できる．また $s=2$ のときにはこの方程式は線型化された重力場に対応するものとみなせる．

twistor 理論はこの方程式 (52), (53) に対して一解解の積分公式を与える．結論のみ述べると，積分公式は次のようになる：

(56)
$$\varphi_{\alpha\beta\cdots\gamma} = \int \mu^{\alpha+\beta+\cdots+\gamma} f(x^{0\dot{0}}+\mu x^{1\dot{0}}, x^{0\dot{1}}+\mu x^{1\dot{1}}, \mu)\, d\mu,$$
$$\psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\cdots\dot{\gamma}} = \int \lambda^{\dot{\alpha}+\dot{\beta}+\cdots+\dot{\gamma}} g(x^{0\dot{0}}+x^{0\dot{1}}\lambda, x^{1\dot{0}}+x^{1\dot{1}}\lambda, \lambda)\, d\lambda.$$

ここで $f=f(v^{\dot{0}}, v^{\dot{1}}, \mu)$, $g=g(u^{0}, u^{1}, \lambda)$ はそれぞれ3変数の正則函数であり，積分は被積分函数の定義域（$\subset \mathbb{P}^1$, λ と μ はその上の affine 座標とみなす）内の適当な1次元 chain

に沿って行われるものとする．また $\lambda^{\dot\alpha+\dot\beta+\cdots+\dot\gamma}$ では $\dot0$，$\dot1$ を 0，1 に読みかえて λ のべきと解釈する（$\lambda^{\dot0+\dot0+\cdots+\dot0}=1$，$\lambda^{\dot1+\dot0+\cdots+\dot0}=\lambda$, etc）．(56) の被積分函数の構造はむしろ次のように書き直す方が理解し易いかも知れない：

(57)
$$
\begin{aligned}
&\mu^{\alpha+\beta+\cdots+\gamma} f(x^{0\dot0}+\mu x^{1\dot0},\ x^{0\dot1}+\mu x^{1\dot1},\ \mu)\\
&\quad = \mu_\alpha\mu_\beta\cdots\mu_\gamma\,\tilde f(\mu_\sigma x^{\sigma\dot0},\ \mu_\sigma x^{\sigma\dot1},\ \mu_0,\ \mu_1),\\
&\lambda^{\dot\alpha+\dot\beta+\cdots+\dot\gamma} g(x^{0\dot0}+x^{0\dot1}\lambda,\ x^{1\dot0}+x^{1\dot1}\lambda,\ \lambda)\\
&\quad = \lambda_{\dot\alpha}\lambda_{\dot\beta}\cdots\lambda_{\dot\gamma}\,\tilde g(x^{0\dot\sigma}\lambda_{\dot\sigma},\ x^{1\dot\sigma}\lambda_{\dot\sigma},\ \lambda_{\dot0},\ \lambda_{\dot1}),
\end{aligned}
$$

ここで

(58)
$$
\begin{aligned}
&\lambda_{\dot0}=1,\ \lambda_{\dot1}=\lambda,\ \mu_0=1,\ \mu_1=\mu,\\
&\tilde f(v^{\dot0},v^{\dot1},\mu_0,\mu_1)\equiv f(v^{\dot0}/\mu_0,\ v^{\dot1}/\mu_0,\ \mu_1/\mu_0),\\
&\tilde g(u^0,u^1,\lambda_{\dot0},\lambda_{\dot1})\equiv g(u^0/\lambda_{\dot0},\ u^1/\lambda_{\dot1},\ \lambda_{\dot1}/\lambda_{\dot0}).
\end{aligned}
$$

$\tilde f$，$\tilde g$ はそれぞれ $(v^{\dot\alpha},\mu_\alpha)$，$(u^\alpha,\lambda_{\dot\alpha})$ の 0 次斉次函数であることに注意されたい．上のように書き直すことによって明らかなように，前述の積分公式はまさしく twistor 対応を用いて場の方程式の解を twistor 空間上の対象と結びつけるものになっている．$\tilde f$，$\tilde g$ は本質的には $\mathbb{P}(T^*)$，$\mathbb{P}(T)$ 上の函数であり，(56) 右辺は $\mathbb{P}(T^*)$，$\mathbb{P}(T)$ 上の微分形式を $\pi_3^{23}\circ(\pi_2^{23})^{-1}(x)$，$\pi_1^{12}\circ(\pi_2^{12})^{-1}(x)$ 内の chain に沿って積分したものと解釈できる．ただし (56) では (58) に示したような非斉次座標を使って表現

を簡便化している。斉次座標を用いる表現やその cohomological な解釈については文献を参照されたい。

公式 (56) が確かに場の方程式の解を与えることは容易に check できるので，説明しておこう。このことは直接計算でも確認できるが，次のように考えると意義がより明瞭に理解されるであろう。まず被積分函数が次の微分方程式を満たすことに注目する。

(59)
$$(-\mu\partial_{0\dot\alpha} + \partial_{1\dot\alpha})\, f(x^{0\dot0}+\mu x^{1\dot0}, x^{0\dot1}+\mu x^{1\dot1}, \mu) = 0,$$
$$(-\lambda\partial_{\alpha\dot0} + \partial_{\alpha\dot1})\, g(x^{0\dot0}+x^{0\dot1}\lambda, x^{1\dot0}+x^{1\dot1}\lambda, \lambda) = 0.$$

あるいは (57), (58) のような斉次表現を用いればこれは

(60)
$$\mu^{\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}\, \tilde f(\mu_\sigma x^{\sigma\dot0}, \mu_\sigma x^{\sigma\dot1}, \mu_0, \mu_1) = 0,$$
$$\lambda^{\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}\, \tilde g(x^{0\dot\sigma}\lambda_{\dot\sigma}, x^{1\dot\sigma}\lambda_{\dot\sigma}, \lambda_{\dot0}, \lambda_{\dot1}) = 0,$$

と書き直せる。(実際にはこれらの方程式が $f(\cdots)$, $g(\cdots)$, $\tilde f(\cdots)$, $\tilde g(\cdots)$ という形の函数を逆に特徴づけるものであることにも注意されたい。) (59) に μ, λ のべきを掛けて積分すればただちに (56) が (55) を満たすことが判る。代数解析的な言葉でいえば，方程式 (59) を "積分" して得られるのが場の方程式 (55) である，ということになる。

Yang-Mills 方程式のような非線型場を twistor 理論の立場

から記述することは線型場の場合よりもはるかに面倒な話になる．Yang-Mills方程式（平坦時空における）に関して言えば，場の方程式はtwistor空間上のある種のvector束の構造に翻訳され，両者の関係は積分公式で結ばれるような単純なものではない．実は，正確に言えばtwistor理論で簡潔に記述できるのは（反）自己双対解と呼ばれる一部の解に限られている．一般の解も扱えない訳ではないが（文献に譲る），いささか複雑な議論を必要とし，その本質には十分に解明されていると言い難い面がある．今後の課題であろう．

vector束との対応を説明する前に，まずYang-Mills方程式の定義を簡単にまとめておく．方程式の未知函数は4個の行列値（$r\times r$とする）函数$A_{\alpha\dot\alpha}$で，gauge potentialと呼ばれる．これは時空上のrank rのvector束Eに接続を定義する共変微分作用素を局所的に

(61) $$\nabla_{\alpha\dot\alpha}(\equiv\nabla_{\partial_{\alpha\dot\alpha}})=\partial_{\alpha\dot\alpha}+A_{\alpha\dot\alpha},\quad \partial_{\alpha\dot\alpha}\equiv\partial/\partial x^{\alpha\dot\alpha}$$

と表現するときの接続係数である．その曲率形式の成分

(62) $$F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}\equiv[\nabla_{\alpha\dot\alpha},\nabla_{\beta\dot\beta}]=\nabla_{\alpha\dot\alpha}\nabla_{\beta\dot\beta}-\nabla_{\beta\dot\beta}\nabla_{\alpha\dot\alpha}$$

を用いるとき，Yang-Mills方程式（正確にはEuclid空間上の

Yang-Mills方程式を複素領域に延長して（(21)のような変数変換で書き直したもの）は次の形に書ける：

(63) $$[\nabla^{\alpha\dot{\alpha}}, F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}] = 0 \quad (\text{Yang-Mills方程式})$$

これはgauge potentialに関して2階微分方程式であり，$r \geqq 2$ならば非線型である．$r = 1$ならば線型で，実は電磁場に対するMaxwellの方程式と同等であるが，我々は主に$r \geqq 2$の場合に関心がある．

一般のYang-Mills場が上のようにgauge potentialに関する2階の方程式で記述されるのに対して，(反)自己双対解は1階の方程式で特徴づけられる．これについて以下説明しておく．まず$F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}$を次のように分解する：

(64) $$F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}} = \Phi_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \epsilon_{\alpha\beta}\Psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}},$$
$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta},\ \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}},\ \Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta\alpha},\ \Psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \Psi_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}.$$

このような分解は常に可能であり，実際

(65) $$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}},\quad \Psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}$$

とおけばよい．ところでHodgeの$*$作用素に関する$F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}$の双対を$*F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}$と表わす，すなわち

(66) $$(*F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta})\,dx^{\alpha\dot\alpha}\wedge dx^{\beta\dot\beta} \equiv *(F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}\,dx^{\alpha\dot\alpha}\wedge dx^{\beta\dot\beta})$$

と定義すると

(67) $$*F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} = \Phi_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} - \epsilon_{\alpha\beta}\Psi_{\dot\alpha\dot\beta}$$

となる．あるいはこれを $*F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}$ の定義としても構わぬ．このとき自己双対解，反自己双対解はそれぞれ次の方程式で定義される：

(68) $$*F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} = F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} \quad (\Longleftrightarrow \Psi_{\dot\alpha\dot\beta} = 0) \quad (\text{自己双対解})$$

(69) $$*F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} = -F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} \quad (\Longleftrightarrow \Phi_{\alpha\beta} = 0) \quad (\text{反自己双対解})$$

実は (68), (69) から (63) が自動的に従う．それは次の恒等式が存在するからである：

(70) $$[\nabla^{\alpha\dot\alpha}, *F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}] = 0 \quad (\text{Bianchi 恒等式})$$

この恒等式は $\nabla_{\alpha\dot\alpha}$ に対する Jacobi 恒等式（むしろそちらが数学で普通に言う Bianchi 恒等式であるが）から容易に導ける．なお，$r=1$ の場合（すでに注意したように，このとき (63) は電磁場を記述する）には (63) と (70) を組み合わせることにより，$\Phi_{\alpha\beta}$, $\Psi_{\dot\alpha\dot\beta}$ がそれぞれ (52), (53)（$s=1$）を満たすことが判る．$s=1$ のとき (52), (53) が電磁場を記述する，と

述べた（p. 26）のはこのような意味においてである．しかし $r \geqq 2$ ではそのような書きかえは無論できない．

さて，（反）自己双対解は twistor 空間 $\mathbb{P}(T)$（$\mathbb{P}(T^*)$）上の vector 束（より正確には解の定義域に応じて定まる twistor 空間内の適当な開集合で定義された vector 束）の構造に翻訳される，というのが（反）自己双対解に関して知られている基本的な事実である．ここでは twistor 空間上の vector 束からどのように解 $A_{\alpha\dot{\alpha}}$ を構成するかという点についてのみ，ごく簡単に説明しておく（解から vector 束をつくる手順は文献に譲る）．例えば $\mathbb{C}^4$ の開集合 U で定義された自己双対解は $\mathbb{P}(T) \cap \{(\lambda_\alpha) \neq (00)\} \cap \pi_1^{12} \circ (\pi_2^{12})^{-1}(U)$（$\hat{U}$ と記す）上の rank r の正則 vector 束（$\tilde{E}$ と記す）で

(71)　各 $x \in U$ に対して対応する $\mathbb{P}(T)$ 内の line $\ell(x)$ $= \pi_1^{12} \circ (\pi_2^{12})^{-1}(x)$ への $\tilde{E}$ の制限 $\tilde{E}|_{\ell(x)}$ が自明束

という条件を満足するものと対応する．$\tilde{E}$ から $A_{\alpha\dot{\alpha}}$ を得る手順を説明するために，$\hat{U}$ を 2 枚の開集合 $\hat{U}_\alpha = \hat{U} \cap \{\lambda_\alpha \neq 0\}$（$\alpha = 0, 1$）（それぞれ $\mathbb{C}^3$ 内の開集合と同型）で覆っておいて $\tilde{E}$ を変換函数で表現しておく．自明束 $\hat{U}_\alpha \times \mathbb{C}^r$ をはり合わせて $\tilde{E}$ を定義する変換函数は $\hat{U}_0 \cap \hat{U}_1$ 上の $GL(r, \mathbb{C})$ 値正

則函数である．それは斉次座標$(u^\alpha, \lambda_{\dot\alpha})$の$GL(r,\mathbb{C})$値0次斉次函数$\widetilde{F}(u^0, u^1, \lambda_{\dot 0}, \lambda_{\dot 1})$で表現してもよいし，また(57), (58)と同様に非斉次化した$F(u^0, u^1, \lambda) \equiv \widetilde{F}(u^0, u^1, 1, \lambda)$とみてもよい．簡単のため後者の表現をとると，結局vector束$\widetilde{E}$を与えることは$\widetilde{U}_{\dot 0} \cap \widetilde{U}_{\dot 1} \cap \{\lambda_{\dot 0}=1\} \hookrightarrow \mathbb{C}^3$上の$GL(r,\mathbb{C})$値正則函数$F(u^0, u^1, \lambda)$を与えることと同等であることがわかる．さらに，条件(71)は各$x \in U$に対して

(72) $$\Psi_{\dot 1}(x, \lambda^{-1}) = F(x^{0\dot 0} + x^{0\dot 1}\lambda, x^{1\dot 0} + x^{1\dot 1}\lambda, \lambda)\Psi_{\dot 0}(x, \lambda),$$

$\Psi_{\dot\alpha}(x,\lambda)$ $(\dot\alpha = \dot 0, \dot 1)$は$\lambda$に関して$\mathbb{C}$上正則な$GL(r,\mathbb{C})$値函数

という$\Psi_{\dot\alpha}(x,\lambda)$が存在することと同値である．$\Psi_{\dot\alpha}(x,\lambda)$が$x$に関しても正則であると仮定しよう．（少くとも局所的にはそのように選び直せる．$\Psi_{\dot\alpha}(x,\lambda)$自体はそもそも一意的ではないが，任意性はいわゆるgauge変換の自由度に他ならぬ．大域的なYang-Mills場を得るにはgauge変換を利用して局所的な場をはり合わせることが一般には必要になるが，ここではその問題には立ち入らない．）このときただちに

(73) $$(-\lambda\partial_{\alpha\dot 0} + \partial_{\alpha\dot 1})\Psi_{\dot 1}\cdot\Psi_{\dot 1}^{-1} = (-\lambda\partial_{\alpha\dot 0} + \partial_{\alpha\dot 1})\Psi_{\dot 0}\cdot\Psi_{\dot 0}^{-1}$$

であることがわかる．これは$F(\cdots)$が(59)と同様の方程式

を満たすことによる．さらに(73)の関係式と$\Psi_{\dot{0}}, \Psi_{\dot{1}}$の定義域に関する仮定から，Liouvilleの定理を用いる簡単な議論によって(73)両辺が実はλの1次式であることが判る．つまり

$$(64)\qquad (-\lambda\partial_{\alpha\dot{0}}+\partial_{\alpha\dot{1}})\Psi_{\dot{1}}\cdot\Psi_{\dot{1}}^{-1}=(-\lambda\partial_{\alpha\dot{0}}+\partial_{\alpha\dot{1}})\Psi_{\dot{0}}\cdot\Psi_{\dot{0}}^{-1}$$
$$=-(-\lambda A_{\alpha\dot{0}}+A_{\alpha\dot{1}})$$

という行列値函数$A_{\alpha\dot{\alpha}}$が存在する．これが求める自己双対解である．反自己双対解も同様にして記述される．

上のようにして得た$A_{\alpha\dot{\alpha}}$が実際に方程式(68)を満たすことは次のようにして判る．まず(68)は次の方程式に書き直せることに注意する（これは簡単に確められる）：

$$(75)\qquad [-\lambda\nabla_{0\dot{0}}+\nabla_{0\dot{1}},\ -\lambda\nabla_{1\dot{0}}+\nabla_{1\dot{1}}]=0\quad(\lambda\in\mathbb{C}).$$

他方(74)は

$$(76)\qquad (-\lambda\nabla_{\alpha\dot{0}}+\nabla_{\alpha\dot{1}})\Psi=0\quad(\Psi=\Psi_{\dot{0}},\Psi_{\dot{1}})$$

と書き直せる．これより

$$[-\lambda\nabla_{0\dot{0}}+\nabla_{0\dot{1}},-\lambda\nabla_{1\dot{0}}+\nabla_{1\dot{1}}]\Psi=0$$

であるが，交換子はすでに微分作用素を含まず，また$\Psi_{\dot{0}}, \Psi_{\dot{1}}$は$GL(r,\mathbb{C})$値であるから，結局(75)が従う．

以上に見てきたように，twistor空間上のvector束から時空上の（反）自己双対Yang-Mills場を構成する手順で最も重要なのは(72)をみたすΨ_0，Ψ_1を見出す段階である．実はこの種の問題はRiemann-Hilbert問題の名称で別個に研究されてきた．例えばRiemann-Hilbert問題の解はFredholm型積分方程式の解として表現できること，など様々なことが知られている．Riemann-Hilbert問題はいわゆる非線型可積分系あるいは完全積分可能系（例として，KdV方程式など多数の方程式が知られている）に応用され，重要な解法のひとつとなっている．上に説明した（反）自己双対Yang-Mills場の構成法はそのようなRiemann-Hilbert問題の非線型可積分系への応用の仕方とほとんど同じ構造を有し，その意味では（反）自己双対Yang-Mills場を記述する方程式(68)，(69)もまた一種の非線型可積分系とみなすことができる．このことは方程式の形状自体についても言えるのであり，実際(68)は（(69)もそうだが）(75)のような交換子型の表示をもち，しかもそれは(76)のような線型系のFrobeniusの意味での積分可能条件とみなせるが，このような特徴は様々な非線型可積分系と共通するものである．ちなみに，(76)の形の線型系は与えられた（反）自己双対Yang-Mills場からtwistor空間上のvector束を構成する際にも重要な役割をはたす．

PART 2. その他の時空におけるtwistor

twistorの概念は通常の4次元平坦時空以外にも拡張されている。ここではその一端を簡単に紹介し，展望らしきものも揚げてみる。紙数の関係で記述がかなり粗雑になるが，さらに進んで文献で詳細を知るためのきっかけとして利用していただければ幸いである。

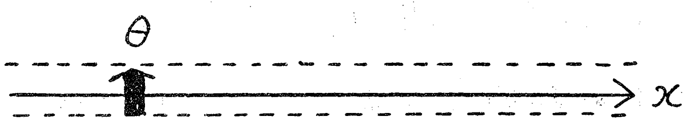
8. 超時空におけるtwistor

超時空におけるtwistorについて議論するためには，まず超空間とは何かということから説明を始めなければなるまい。これはしかしなかなか簡単には説明し難いし，その物理的背景という点に至ってはこの場では到底扱い切れないほど多様な内容を有する。従って詳細は文献(実は莫大な量にのぼる)に譲りたい。ただここで扱うのは平坦な超空間と言うべきものであり，正確な定義(ひとつのやり方は一種の環付き空間としてとらえることによる；Maninの論文参照)によらなくとも大体の感じがつかめる。すなわち，そのような平坦な超空間はひとことでいえば何個かの大域的座標 $x^1, \cdots, x^m, \theta^1, \cdots, \theta^n$ をもつ空間なのだが，通常の空間と違って座標は可

換量ばかりからなるのではなく，次の基本関係に従う：

$$
(77)\qquad
\begin{aligned}
&x^i x^j = x^j x^i, \qquad x^i\theta^p = \theta^p x^i,\\
&\theta^p\theta^q = -\theta^q\theta^p \qquad (1\le i,j\le m,\ 1\le p,q\le n).
\end{aligned}
$$

（いいかえれば $x=(x^1,\dots,x^m)$, $\theta=(\theta^1,\dots,\theta^n)$ の生成する $\mathbb{C}$代数 $\mathbb{C}[x,\theta]$ は通常の多項式環 $\mathbb{C}[x]$ 上に定義される外積代数（Grassmann代数）の構造をもつ．特に各 θ^p は巾零であり，可換な座標 x とは大いに性質を異にしている．強いて言えば，この空間は x 方向には通常のように無限に延びているが，θ 方向には大きさが無い（下図）．（ちなみに，



Manin はこの他に Spec $\mathbb{Z}$ のような離散的な座標軸――数論的座標軸――を付け加えることも提唱しているようである．）
このような超空間は $m|n$ 次元であると言う．特に $m|0$ 次元の超空間は通常の意味の m 次元空間に他ならない．

さて，twistor 理論の対象となるのは可換座標 $x^{\alpha\dot\alpha}$ ($\alpha=0,1$, $\dot\alpha=\dot0,\dot1$) 並びに反可換座標 θ^α_i, $\bar\theta^{i\dot\alpha}$ ($\alpha=0,1$, $\dot\alpha=\dot0,\dot1$, $i=1,\dots,N$) をもつ前述のような意味での $4|4N$ 次

元の平坦な超空間である．$x^{\alpha\dot{\alpha}}$は通常の4次元時空の座標にあたり，この超空間（超時空）はそれに4N個の反可換座標軸をつけ加えて拡張して得られるものである．

これに対して次の二組の方程式を考える：

(78) $$u^{\alpha} = (x^{\alpha\dot{\alpha}} - \theta_i^{\alpha}\bar{\theta}^{i\dot{\alpha}})\lambda_{\dot{\alpha}}, \quad \eta^i = \bar{\theta}^{i\dot{\alpha}}\lambda_{\dot{\alpha}}.$$

(79) $$v^{\dot{\alpha}} = \mu_{\alpha}(x^{\alpha\dot{\alpha}} + \theta_i^{\alpha}\bar{\theta}^{i\dot{\alpha}}), \quad \zeta_i = \mu_{\alpha}\theta_i^{\alpha}.$$

これらは通常の4次元時空におけるtwistor空間との対応関係（の座標表示）を自然に拡張したものになっている．すなわち，$(u^{\alpha}, \lambda_{\dot{\alpha}}, \eta^i)$，$(v^{\dot{\alpha}}, \mu_{\alpha}, \zeta_i)$を与えれば(78)，(79)はそれぞれ超時空においてα-plane，β-planeに対応する$2|2N$次元の"plane"を定義し，またそれらの交叉は

(80) $$v^{\dot{\alpha}}\lambda_{\dot{\alpha}} - \mu_{\alpha}u^{\alpha} + 2\zeta_i\eta^i = 0$$

（これは(49)に対応する）のときに限って存在して，null lineの対応物（$1|N$次元）を与える．ただし，$u^{\alpha}, \lambda_{\dot{\alpha}}, v^{\dot{\alpha}}, \mu_{\alpha}$を今迄のように可換量とみなすならば，(78)，(79)より必然的にη^i, ζ_iは反可換量とならざるを得ない．従って$(u^{\alpha}, \lambda_{\dot{\alpha}}, \eta^i)$，$(v^{\dot{\alpha}}, \mu_{\alpha}, \zeta_i)$はそれぞれある$4|N$次元の超空間$T$，$T^*$の座標である．しかも$(u^{\alpha}, \lambda_{\dot{\alpha}}, \eta^i)$を$u^{\alpha}, \lambda_{\dot{\alpha}}, \eta^i$のいずれと

も可換な量 c によって $(cu^{\alpha}, c\lambda_{\dot{\alpha}}, c\eta^{i})$ でおきかえても (78) が定める時空内の "plane" は不変であり, $(u^{\alpha}, \lambda_{\dot{\alpha}}, \eta^{i})$ は T ($\dim T = 4|N$) の定める射影空間 $\mathbb{P}(T)$ (その正確な定義についてはManinの論文を見よ) の上の斉次座標と解釈される. 同様に $(v^{\dot{\alpha}}, \mu_{\alpha}, \zeta_{i})$ は射影空間 $\mathbb{P}(T^{*})$ ($\dim T^{*} = 4|N$) の斉次座標とみなされる.

以上は座標を使った説明だが, 第1, 第2節で述べたようなことを超空間へ拡張して, "超flag多様体" のことばで幾何学的にtwistor対応を説明することもできる. それについてはManinの論文を参照されたい.

場の方程式への応用についてはFeber, Witten, Volovich, Devchand, Chau, Manin らの各論文を参照されたい. Feberは線型場を, Witten, Volovich, Devchand, Chau は超時空で定義されたYang-Mills場を扱っている. Wittenが指摘しているように後者は通常の時空でのYang-Mills場の記述とも関係がある. Maninはさらに超重力との関連も探っているらしいが, twistor理論をそのような曲がった超時空へ拡張するところまでは進んでいない. この辺が今後の課題であろう.

9. 曲がった時空におけるtwistor

曲がった時空を記述するひとつの方法は計量を与えることである．Einsteinの重力理論はその典型であり，計量を$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$（$x^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, は局所座標）と表示するとき，適当な座標で$g_{\mu\nu}$が定数であればこの時空は平坦である（つまり重力がない）と解釈されるが，一般には時空は平坦ではなく（つまり重力がある），真空中ではその形はEinstein方程式$R_{\mu\nu} = 0$（$R_{\mu\nu}$はRicci tensor）で記述される．（宇宙項を付け加えるときには$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Lambda = 0$となる.）一般に計量が与えられればそれに付随してLevi-Civita接続と呼ばれる一種のaffine接続が定義され，従って測地線の概念が意味をもつ．局所座標x^μに関するLevi-Civita接続の接続係数を$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$と書くと，測地線$x^\mu = x^\mu(t)$は次の微分方程式で特徴づけられる．

(81) $$\frac{d^2x^\lambda(t)}{dt^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x(t))\frac{dx^\mu(t)}{dt}\frac{dx^\nu(t)}{dt} = 0.$$

重力理論で特に大切なのは次のそれぞれの条件を満たす二種類の測地線である．

(82) $$g_{\mu\nu}(x(t))\frac{dx^\mu(t)}{dt}\frac{dx^\nu(t)}{dt} = 1.$$

(83) $$g_{\mu\nu}(x(t))\frac{dx^\mu(t)}{dt}\frac{dx^\nu(t)}{dt} = 0.$$

(82)をみたす測地線は背景の重力場への影響を無視できる程度の質量の粒子が描く軌跡を与える．つまり木からリンゴが落ちたり，太陽のまわりを水星がまわったりするときの運動の軌跡である．これに対して(83)をみたす測地線は零測地線(null geodesic)と呼ばれ，光線の軌跡をあらわす．零測地線が曲がった時空においてtwistor理論を構築する際重要な役割を果たすであろうことは容易に想像できるだろう．ちなみに(82)で右辺の1を−1に変えたものも数学的には意味をもつが，物理的解釈ではそのような軌跡を描く粒子は光速より速く運動することになり，相対論的因果律を破るので，通常は考えない．もっとも，我々は局所座標x^μを複素変数とみなして議論を複素多様体上で進めたい（つまり$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$を複素2次形式と考える）ので±1のちがいには余り興味はない．むしろ零測地線の方が重要である．

ところで曲がった時空を記述するもっと一般的な枠組はCartanに始まるaffine接続の幾何学であり，様々な幾何学(その中にはEinsteinの重力理論やKaluza, Klein, Weylらによるその拡張の試みも含まれる)がその特別の場合として理解される．しかも，微分形式のmoving frameを使ってaffine接続を表現するCartan流の方法は添字の沢山現れるtensor解析

的計算よりも見通しが良い．計量で記述される幾何学（つまりRiemann 幾何学）をCartan流に書き直すには，計量を

$$ds^2 = g_{ab}e^a e^b, \quad e^a \text{ は 1 次微分形式},$$

という形に書くとき g_{ab}（dx^μ に関する成分 $g_{\mu\nu}$ とは添字の違いで区別する）がなるべく簡単な形になるように e^aをとり，それらを moving frame に選ぶ．例えば標準的な選び方は

(84) $$ds^2 = \delta_{ab}e^a e^b, \quad \delta_{ab} = \text{Kronecker's delta}$$

である．注意すべきなのは，このような計量の表示ではe^aを $e^a \to l^a{}_b e^b$, $(l^a{}_b)$ は $SO(4)$ 値函数，と変えても ds^2 自体は不変に保たれることである．これは (84) という表示を選んだことによって生じる新たな自由度を与える．さらに，今考えている ds^2 が実は複素多様体上の複素2次形式であるとすると（既に最初に注意しているように我々は常にその状況で考えている），e^a の複素1次結合

(85) $$\begin{pmatrix} e^{0\dot{0}} & e^{0\dot{1}} \\ e^{1\dot{0}} & e^{1\dot{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^0 + \sqrt{-1}e^1 & e^2 + \sqrt{-1}e^3 \\ -e^2 + \sqrt{-1}e^3 & e^0 - \sqrt{-1}e^1 \end{pmatrix}$$

を moving frameに選んでよく，このとき ds^2 に対して

(86) $$ds^2 = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}e^{\alpha\dot{\alpha}}e^{\beta\dot{\beta}}$$

という表示を得る．この場合にも ds^2 の表示は一意的ではなく，$e^{\alpha\dot{\alpha}}$ を $e^{\alpha\dot{\alpha}} \longrightarrow l^{\alpha}{}_{\beta} m^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} e^{\beta\dot{\beta}}$，$(l^{\alpha}{}_{\beta})$ と $(m^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}})$ は共に $SL(2)$ 値函数，と変える自由度が残る．このように(84)，(86)ではそれぞれ $SO(4)$，$SL(2)\times SL(2)$ の分の自由度が現れるが，これは $SO(4)$ と $SL(2)\times SL(2)$ が局所同型（Lie環が同型）であることを反映している．e^{a} や $e^{\alpha\dot{\alpha}}$ を用いてLevi-Civita接続の接続係数や各種の曲率を議論することの詳細は引用文献（Plebanski, Eguchi et al）に譲る．計量 ds^2 を(86)のように表示することは曲がった時空のtwistor理論を考える際の出発点となる．

さて，曲がった時空のtwistor理論がどのようにして構築されるか考える．平坦な時空の場合には，twistor空間 $\mathbb{P}(T)$，$\mathbb{P}(T^*)$，$F(1,3;T)$ はそれぞれ α-plane，β-plane，null line の集合と同一視された．従って曲がった時空でも α-plane，β-plane，null line の対応物を導入し，それらがなす空間としてtwistor空間を定義するのが自然であろう．このうち，null line の対応物が null geodesic である，というのはまず文句のないところであろう．それでは α-plane，β-plane の対応物は何であろうか．ごく大雑把に考えて，それらは時空内の2次元曲面であり，接空間ごとに見れば α-plane，β-plane

のように見えるもの，として定義されるはずである．ところで α-plane や β-plane の接 vector は座標 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ に関して (42) のような成分（α-plane のときには $\lambda_{\dot{\alpha}}$ 固定，μ_{α} 任意，β-plane のときには逆）をもつことがわかっている．ただ，あいにく曲がった時空では $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ のような標準的な座標はない．そこで代わりに $e^{\alpha\dot{\alpha}}$ とそれに dual な接 vector 場 $\partial_{\alpha\dot{\alpha}}$，つまり $\langle\ ,\ \rangle$ で 1 次微分形式と接 vector 場の間の pairling を表わすとき

$$\langle e^{\alpha\dot{\alpha}}, \partial_{\beta\dot{\beta}} \rangle = \delta^{\alpha}_{\beta}\, \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \tag{87}$$

で定義される $\partial_{\alpha\dot{\alpha}}$（$e^{\alpha\dot{\alpha}}$ が 1 次独立である限り一意的に存在する）を規準として用いる．そして (42) のあらわす接 vector $\mu^{\alpha}\lambda^{\dot{\alpha}}\partial/\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}$ の代わりに $\mu^{\alpha}\lambda^{\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}$ を考えればよいだろう．しかしながら，ここでもうひとつ問題が生じる：α-plane の接 vector における $\lambda^{\dot{\alpha}}$ および β-plane における μ^{α} は定数であったが，曲がった空間における対応物ではそれらは場所毎に変化すべきかも知れない．どのように変化するかは別の原理で定めねばなるまいが，定数にえらべる（後にそのような場を例としてとり上げる）ことを要請すると扱い得る時空の型が限定されてしまう可能性がある．以上のことをまとめると，α-plane，β-plane の曲がった時空における対応物（それを <u>α-surface</u>，<u>β-surface</u> と呼ぶことにする）は少くとも

次の要請をみたさねばならない：

<u>要請 1</u>. α-surface (β-surface) 上には函数 $\lambda^{\dot\alpha}$ (μ^{α}) が与えられ，各点の接空間は $\mu^{\alpha}\lambda^{\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}$, μ^{α} 任意 ($\lambda^{\dot\alpha}$ 任意) という形の接 vector で張られる．

次に要請 1 に現れる函数 $\lambda^{\dot\alpha}$ (α-surface), μ^{α} (β-surface) がどのような条件を満たすべきかを考える．ここで α-plane, β-plane が null line の族から生成されていることを思い出されたい．そこで同様の性質を null line の代わりに null geodesic に関して α-surface, β-surface に要請することは自然であろう．これが α-surface 上の函数 $\lambda^{\dot\alpha}$, β-surface 上の函数 μ^{α} に対して要求する条件を説明するには言葉の用意が少々必要である．以下詳しい説明を省いて必要な言葉を羅列するが，詳細は文献 (Plebanski, Boyer, Atiyah et al.) を参照されたい．V, $\dot V$ で無点 spinor および付点 spinor のつくる vector 束 (つまりそれぞれ μ^{α}, $\lambda^{\dot\alpha}$ の属する vector 束) を表す．今は時空上で局所的に考えているから，V と $\dot V$ はともに時空上の rank 2 の自明束である．大切なのは

$$
(88)\qquad
\begin{aligned}
&\text{時空の接束} \cong V \otimes \dot V \\
&\mu^{\alpha}\lambda^{\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} \longleftrightarrow \mu^{\alpha}\otimes\lambda^{\dot\alpha}
\end{aligned}
$$

という同型の存在である．さて接束上には計量の定めるLevi-Civita接続∇があるが，(88)に対応してV, $\dot{V}$上には

$$\nabla = \nabla\!\!\!/ \otimes \dot{\nabla\!\!\!/} \tag{89}$$

をみたすaffine接続$\nabla\!\!\!/$, $\dot{\nabla\!\!\!/}$がそれぞれ定まる．$\nabla\!\!\!/$, $\dot{\nabla\!\!\!/}$の接続形式をそれぞれ$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta}$, $\Gamma^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$であらわす．すなわち，

$$\begin{aligned} \nabla\!\!\!/\,\mu &= (d\mu^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta}\,\mu^{\beta}), \quad \mu = (\mu^{\alpha}) \\ \dot{\nabla\!\!\!/}\,\lambda &= (d\lambda^{\dot\alpha} + \Gamma^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,\lambda^{\dot\alpha}), \quad \lambda = (\lambda^{\dot\alpha}) \end{aligned} \tag{90}$$

これらを用いるとき，前述の要請は次のように定式化される：

<u>要請2</u>．要請1でα-surface（β-surface）上に指定された函数$\lambda^{\dot\alpha}$（μ^{α}）は$\dot{\nabla\!\!\!/}\lambda = 0$（$\nabla\!\!\!/\mu = 0$）をみたす．ただし$\lambda = (\lambda^{\dot\alpha})$, $\mu = (\mu^{\alpha})$をそれぞれ$\dot{V}|_{\alpha\text{-surface}}$, $V|_{\beta\text{-surface}}$のsectionとみなし，$\dot{\nabla\!\!\!/}$と$\nabla\!\!\!/$のこれらへの制限を同じ文字で表している．

α-surface(β-surface)の任意の接vectorが$\lambda^{\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}$($\mu^{\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}$)の1次結合で書けることに注意すると，要請2は次のようにも言いかえられる：

<u>要請2*</u>．要請1でα-surface（β-surface）上に指定された函数$\lambda^{\dot\alpha}$（μ^{α}）は

(91) $\lambda^{\dot\beta}\partial_{\beta\dot\beta}\lambda^{\dot\alpha}+\Gamma^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma\beta\dot\beta}\lambda^{\dot\gamma}=0$ $\left(\mu^{\beta}\partial_{\beta\dot\beta}\mu^{\alpha}+\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta\dot\beta}\mu^{\gamma}=0\right)$

をみたす．ただし $\Gamma^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma\beta\dot\beta}$，$\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta\dot\beta}$ はそれぞれ $\Gamma^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}$，$\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma}$ の展開

$$\Gamma^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}=\Gamma^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma\beta\dot\beta}e^{\beta\dot\beta},\quad \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma}=\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta\dot\beta}e^{\beta\dot\beta}$$

の係数を表す．

以上の要請により特徴づけられる時空の中の2次元曲面を α-surface，β-surface と呼ぶことにする．問題はこのような surface が十分沢山存在する（例えば3次元多様体をなす程度に）のはどのような状況においてかということであるが，Penrose はこの問題に対して

(92a) Wely tensor が自己双対 $\Rightarrow$ α-surface が十分沢山存在

(92b) Weyl tensor が反自己双対 $\Rightarrow$ β-surface が十分沢山存在

という結論を得た．Weyl tensor 云々の説明も前掲の文献に譲るが，(92a) あるいは (93a) の条件をみたす計量はそれぞれ共形的に自己双対・反自己双対であるという．

もっとも，Penrose の論文は抽象的な説明に終始していて甚だ判りにくい．また以上のような議論では何が twistor 対応を定義する例の三角図式であるのかがはっきりしない．これ

5の点はAtiyah達の論文に示されている方法（のBoyerによるversion）によれば実に明快に説明できる．そこで，これまでの議論はいわば背景説明として理解していただくことにして，改めてAtiyah-Hitchin-Singer-Boyer流の構成法について説明しよう．

この構成法はV, $\dot{V}$をfiber方向に射影化した$\mathbb{P}^1$-Bundle $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(\dot{V})$を利用し，次のような図式でtwistor対応を構成しようというものである．

$$
(93a)\quad
\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{P}(\dot{V}) & \\
\swarrow & & \searrow \\
X & & \mathcal{T}_\alpha \\
\text{時空} & &
\end{array}
\qquad\qquad
(93b)\quad
\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{P}(V) & \\
\swarrow & & \searrow \\
X & & \mathcal{T}_\beta \\
\text{時空} & &
\end{array}
$$

ただしそれぞれの図式は(92a)或は(92b)の条件の下でのみつくれる．図式(a)は次のように構成される．まず$\dot{V}$を6次元の複素多様体（局所座標を$(x^\mu, \lambda_{\dot{\alpha}})$とえらべる）とみなして，その上で次のPfaff方程式を考える：

$$
(94)\quad \mathcal{D}_\alpha:\quad
\begin{aligned}
&e^{\alpha\dot{\alpha}}\lambda_{\dot{\alpha}} = 0,\\
&d\lambda^{\dot{\alpha}} + \Gamma^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\lambda^{\dot{\beta}} = 0.
\end{aligned}
$$

ただし$\lambda_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\lambda^{\dot{\beta}}$．各方程式は$\lambda_{\dot{\alpha}}$について斉次式であるから，(94)は$\mathbb{P}(\dot{V})$上のPfaff方程式を定義する．それを

$\mathbb{P}(\mathcal{D}_\alpha)$ と表すとき，次のことが判る：

(95)　　$\mathbb{P}(\mathcal{D}_\alpha)$が完全積分可能 $\Longleftrightarrow$ Weyl tensorが自己双対

$\mathbb{P}(\mathcal{D}_\alpha)$が完全積分可能ならば各積分多様体は2次元で，しかも自然な射影$\mathbb{P}(\dot{V}) \to X$によりそれは$X$内の2次元多様体と同型になるが，後者は$\alpha$-surfaceに他ならない．さらに

(96)
$\mathcal{T}_\alpha$ ： $\mathbb{P}(\mathcal{D}_\alpha)$の積分多様体のなす集合
$\mathbb{P}(\dot{V}) \longrightarrow \mathcal{T}_\alpha$ ： $\mathbb{P}(\dot{V})$の各点に対してそれを通る$\mathbb{P}(\mathcal{D}_\alpha)$の積分多様体を対応
$\mathbb{P}(\dot{V}) \longrightarrow X$ ： 自然な射影

と定義すれば図式(93a)の構成が完成する．同様にWely tensorが反自己双対ならばV上のPfaff方程式系

$$\mathcal{D}_\beta : \quad \begin{aligned} &\mu_\alpha e^{\alpha\dot{\alpha}} = 0, \\ &d\mu^\alpha + \Gamma^\alpha{}_\beta \mu^\beta = 0 \end{aligned}$$

を介して図式(93b)が構成される．この場合も$\mathcal{D}_\beta$が$\mathbb{P}(V)$上に定義するPfaff方程式の積分多様体は$\mathbb{P}(V) \to X$によりX内のβ-surfaceと同型になる．

こうして最も一般的な場合のtwistor対応の構成のしかたが明らかになったが，ここで少し特別な場合のことを触れて

おこう．$\mathcal{J}_\beta$ についても話は同様だから，ここでは $\mathcal{J}_\alpha$ についてのみ考える．ここで考えたいのは

(97) $\quad \Gamma^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,\lambda^{\dot\beta} = 0 \quad \text{modulo}\,(e^{0\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha},\ e^{1\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha})$

という条件がみたされる場合である．このときには $\mathcal{D}_\alpha$ は

(98) $$\begin{aligned} e^{\alpha\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha} &= 0, \\ d\lambda^{\dot\alpha} &= 0, \end{aligned}$$

に同値であるが，これはとりも直さず α-surface に対して要請1で指定されている函数 $\lambda^{\dot\alpha}$ が常に定数にえらべることを意味する．この場合には $\lambda_{\dot\alpha}$ を parameter と思って X 上の Pfaff 方程式

(99) $\quad e^{\alpha\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha} = 0 \qquad (\lambda_{\dot\alpha} \in \mathbb{C}^2)$

で α-surface が定義される（(39) と比較せよ！）．(99) の積分可能条件は Frobenius の定理によって

(100) $\quad de^{\alpha\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha} \wedge e^{0\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha} \wedge e^{1\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha} = 0 \quad (\lambda_{\dot\alpha} \in \mathbb{C}^2)$

となる．実はさらに

(101) $\quad \Gamma^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = 0 \iff d(e^{0\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha} \wedge e^{1\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha}) = 0 \ (\lambda_{\dot\alpha} \in \mathbb{C}^2)$

ということも判る（Plebanski の論文を見よ）．(101) の方程式

がみたされるとき ds^2 の Riemann tensor は自己双対になる。このような計量は時に Einstein 方程式も同時に満たすので、自己双対 Einstein 計量という。Penrose が nonlinear graviton と呼んだのはこのような計量をもつ時空のことである。これは Einstein 方程式の重要な解の class として今日まで様々な研究（その中には instanton 解も含まれる）が試みられている。

なお (92a)(92b) の条件が同時にみたされるときには Wely tensor は消えて，計量は共形的に平坦，つまり

(102) $$ds^2 = \phi\,\delta_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu,$$

が適当な座標 x^μ と函数 $\phi = \phi(x)\ (\neq 0)$ に対して成立する。これはほとんど平坦時空と変わらない。このような自明な場合を除けば，(93a) と (93b) が同時に構成できることはない。

最後に，共形的に（反）自己双対な計量をもつ時空では，(93a)（(93b)）の対応を用いることによって平坦時空の場合と同様（反）自己双対 Yang-Mills 場を $\mathcal{J}_\alpha$（$\mathcal{J}_\beta$）の上の vector 束に翻訳できる，ということを言い添えておく。詳細は Atiyah 達の論文に説明されているし，前述の $\mathcal{J}_\alpha, \mathcal{J}_\beta$ の構成法と同様の論法で理解することもできる。

10. 展望らしきもの.

少くとも筆者にとって，最も関心があるのは曲がった超時空にtwistorを構成する問題とEinstein方程式の一般の解をtwistor理論の立場で記述する問題の二つである．曲がった時空にtwistorを構成することが或る場合にはEinstein方程式の少くとも一部の解（自己双対・反自己双対）を導いたように，曲がった超時空での同様の議論が可能ならば，Einstein方程式の超時空への拡張（すなわち一種の超重力）との関係が明らかになるかも知れない．この意味で，超重力と通常の重力という違いはあるが，上の二つの問題は密接な関連をもつ．しかも，このような関連をたぐることによって自己双対計量のような一部の解に限らずEinstein方程式の一般の解が扱える可能性がある，というのが大切な点である．これはYang-Mills方程式に関してWittenが注意したこと，すなわち超時空上の或る種のYang-Mills場と通常時空上の一般のYang-Mills場の間には密接な関連がある（ただしここで考える時空・超時空は平坦）という事実から類推される．もっとも，Witten（Isenberg, Yasskin, Greenも独立に）は超時空によらず通常の時空の言葉で一般のYang-Mills場がtwistor的に記述できることも同時に指摘しており，これをEinstein方程式へ拡張する

という可能性も考えられる．Manin と Penkov はそのような議論を試みているが最終的な結果には至っていないようである．

このように twistor 理論の適用範囲がどこまで拡張されるかということを追求するのも重要なことだが，他方では，なぜ或る種の微分方程式は twistor によって解けるのかということの本質も解明されねばならない．これは単に内省的にこれまで知られている結果を再吟味するに留まることではなく，むしろ最初の"どこまで"の問いとも直接にかかわって来ることである．しかしながら"なぜ"という問いに対する明確な解答は今のところ無い．twistor 理論は線型場 ⟶ Yang-Mills 場 ⟶ 重力場という順序で発展して来たが，その研究は各段階で各個撃破的になされた印象がある．もちろんこれらの間には類似性があり，それを手掛りとして研究が行われたわけだが，その類似性は未だ一般原理にまで抽象されていない．いわば twistor 理論には例はあるが一般論が無い．これは少々言い過ぎとしても，"微分方程式を幾何学的構造に翻訳する"という twistor 理論の基本的な戦略の意味を"微分方程式の一般論"とでも呼ぶべき視点（いろいろな立場はあろうが）から深く掘り下げて考えてみることは大いに価値があろうし，上の"なぜ"の問いに対する解答にもつながるはずである．

References

Sect. 0.

1. Penrose, R.: The twistor programme. Reports on Math. Phys. 12 (1977), 65–76.

Sect. 1–7.

Twistor correspondence, flag manifolds, application to linear field equations:

2. Wells, Jr., R.O.: Complex manifolds and mathematical physics. Bull. Amer. Math. Soc. (new series) 1 (1979), 296–336.
3. Gindikin, S.G. and Khenkin, G.M.: Penrose transformations and complex integral geometry. Sovremennye Problemy Matematiki Vol. 17 (1981), 57–111 (English translation, J. Soviet Math. 1983, 508–551).

Application to self-dual Yang-Mills fields:

4. Ward, R.S.: On the self-dual gauge fields. Phys. Lett. 61A (1977), 81–82.
5. Atiyah, M.F. and Ward, R.S.: Instantons and algebraic geometry. Commun. Math. Phys. 55 (1977), 117–124.
6. Corrigan, E.F., Fairlie, D.B., Yates, R.G. and Goddard, P.: The construction of self-dual solutions of SU(2) gauge theory. Commun. Math. Phys. 58 (1978), 223–240.
7. Atiyah, M.F., Drinfeld, V.G., Hitchin, N.J. and Manin, YU.I.: Construction of instantons. Phys. Lett. 65A (1978), 185–187.
8. Ward, R.S.: A Yang-Mills-Higgs monopole of charge 2. Commun. Math. Phys. 79 (1981), 317–325.
9. Prasad, M.K.: Yang-Mills-Higgs monopole solutions of arbitrary charge. Commun. Math. Phys. 80 (1981), 147–149.
10. Ward, R.S.: Ansätze for self-dual Yang-Mills fields. Commun. Math. Phys. 80 (1981), 563–574.
11. Corrigan, E.F. and Goddard, P.: An n monopole solution with $4n-1$ degree of freedom. Commun. Math. Phys. 80 (1981), 575–587.
12. Hitchin, N.J.: On the construction of monopoloes. Commun. Math. Phys. 89 (1983), 145–190.

Self-dual Yang-Mills fields and Riemann-Hilbert problem:

13. Zakharov, V.E. and Shabat, A.B.: Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. II. Func. Anal. Appl. 13 (1979), 166-174.
14. Ueno, K. and Nakamura, Y.: Transformation theory for anti-self-dual equations and the Riemann-Hilbert problem. Phys. Lett. 109B (1982), 273-278.
15. ——————————: Transformation theory for anti-self-dual equations. Publ. RIMS 19 (1983), 519-547.
16. Chau, L.-L.: Chiral fields, self-dual Yang-Mills fields as integrable systems, and the role of the Kac-Moody algebra. In: Lect. Notes in Phys. No. 189, Springer 1983.

Application to general Yang-Mills fields:

17. Witten, E.: An interpretation of classical Yang-Mills theory. Phys. Lett. 77B (1978), 394-398.
18. Isenberg, J, Yasskin, P.B. and Green, P.S.: Non-self-dual gauge fields. Phys. Lett. 78B (1978), 464-468.
19. Isenberg, J. and Yasskin, P.B.: Twistor description of non-self-dual Yang-Mills fields. In: Complex manifold techniques in theoretical physics, ed. D.E. Lerner and P.D. Sommes, Research Notes in Math., Pitman 1979.
20. Manin, Yu. I.: Gauge fields and holomorphic geometry. Sovremennye Problemy Matematiki Vol. 17 (1981), 3-55 (English translation, J. Soviet Math. 1983, 465-507).
21. Henkin, G.M. and Manin, Yu.I.: Twistor descriptoin of classical Yang-Mills-Dirac fields. Phys. Lett. 95B (1980), 405-408.

Monograph:

22. Atiyah, M.F.: Geometry of Yang-Mills fields. Pisa 1979.

Sect. 8.

Introduction to superspaces and supersymmetry:

23. 長町重昭： Supersymmetry, 藤井保憲： Supersymmetry に対する補足. 数学 37 (3) (1985), およびそこに引用されている文献

Application to linear field equations:

24. Feber, A.: Supertwistors and conformal supersymmetry. Nucl. Phys. B132 (1978), 55–64.

Application to supersymmetric Yang–Mills fields:

25. Witten, E.: In Ref. 17.
26. Volovich, I.V.: Supersymmetric Yang-Mills equations as an inverse scattering problem. Lett. Math. Phys. 7 (1983), 517-521; Supersymmetric Yang-Mills theories and twistors. Phys. Lett. 129B (1983), 429-431.
27. Devchand, C.: An infinite number of continuity equations and hidden symmetries in supersymmetric gauge theories. Nucl. Phys. B238 (1984), 333–348.
28. Chau, L.–L.: Supersymmetric Yang–Mills fields as an integrable systems and connection with other nonlinear systems. In: Publ. Math. Sci. Res. Inst. Vol. 3, Springer 1984.
29. Manin, Yu. I.: Flag superspaces and supersymmetric Yang–Mills equations. In: Arithmetic and Geometry, dedicated to Shafarevich, Progress in Mathematics, Birkhäuser 1984.

Perspectives including sypergravity:

30. Manin, Yu.I.: New dimensions in geometry. In: Lect. Notes. Math. No. 1111, Springer 1985.

Sect. 9.

Tools in Riemannian geometry and fiber bundles:

31. Eguchi, Gilkey, P.B. and Hanson, A.J.: Gravitation, gauge theories and differential geometry. Phys. Rep. 66 (1980), 213–393.

Construction of twistor space for curved space–time:

32. Penrose, R.: Nonlinear gravitons and curved twistor theory. Gen. Rel. Grav. 7 (1976), 31–52.
33. Atiyah, M.F., Hitchin, N.J. and Singer, I.M.: Self–duality in four dimensional Riemannian geometry. Proc. R. Soc. London A362 (1978), 425–461.
34. Hansen, R.O., Newman, E.T., Penrose, R. and Tod, K.P.: Proc. R. Soc. London A363 (1978), 1129–1142.

35. Newman, E.T., Porter, J.R. and Tod, K.P.: Twistor surfaces and right-flat spaces, Gen. REl. Grav. 9 (1978), 1129–1142.

36. Curtis, W.D., Lerner, D.E. and Miller, F.R.: Some remarks on the nonlinear gravitons. Gen. Rel. Grav. 10 (1979), 557–565.

Examples of self-dual Einstein metrics obtained by Penrose's construction:

37. Curtis, W.D., Lerner, D.E. and Miller, F.R.: Complex pp waves and the nonlinear graviton construction. J. Math. Phys. 19 (1989), 2024–2027.

38. Ward, R.S.: A class of self-dual solutions of Einstein's equations. Proc. R. Soc. London A363 (1978), 289–295.

39. Tod, K.P. and Ward, R.S.: Self-dual metrics with self-dual Killing vectors. Proc. R. Soc. London A368 (1079), 411–427.

40. Hitchin, N.J.: Polygons and gravitons. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 85 (1979), 465–476.

41. ______________: Twistor construction of Einstein metrics. In: Global Riemannian geometry, ed. T.J. Willmore and N.J. Hitchin, John Willey & Sons 1984.

Different approaches to self-dual Einstein metrics:

42. Plebanski, J.F.: Some solutions of complex Einstein equations. J. Math. Phys. 16 (1975), 2395–2402.

43. Boyer, C.P.: The geometry of complex self-dual Einstein spaces. In: Lect. Notes. Phys. No. 189, Springer 1983.

44. Gindikin, S.G.: Integral geometry and twistors. In: Lect. Notes. Math. No. 970, Springer 1982.

45. Ref. 31 and references cited therein.

Sect. 10.

Twistor approach to general Einstein metrics:

45. Manin, Yu. I. and Penkov, I.B.: Nul-geodesics and complex Einstein spaces. Func. Anal. Appl. 16 (1982), 64–66.